关于二次型的若干问题

厦门大学　林亚南

我们总在实数域$\mathbb{R}$上考虑.

§1. 关于惯性定理的证明方法

惯性定理. 实数域$\mathbb{R}$上的任意二次型都可以经过非退化的线性替换变为规范形

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_{p+q}^2,$$

规范形是唯一确定的.

证明提要. 设二次型f经过非退化的线性替换$X=BY, X=CZ$变为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2 \quad (*)$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_t^2-z_{t+1}^2-\cdots-z_{t+r}^2 \quad (**).$$

设$p>t$. 我们有$Z=C^{-1}BY$, 记$C^{-1}B=(g_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 考虑奇次线性方程组

$$\begin{cases} z_1=g_{11}y_1+g_{12}y_2+\cdots+g_{1n}y_n=0\\ z_2=g_{21}y_1+g_{22}y_2+\cdots+g_{2n}y_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ z_t=g_{t1}y_1+g_{t2}y_2+\cdots+g_{tn}y_n=0\\ y_{p+1}=0\\ \cdots\cdots\\ y_{p+q}=0 \end{cases}$$

方程组含n个未知量, $<n$个方程,故有非零解$(a_1,a_2,\cdots,a_s,0,\cdots,0)$, 代入$(*)$式, 得到$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_s^2>0$. 代入$(**)$式, 得到$-z_{t+1}^2-\cdots-z_{t+r}^2<0$. 矛盾. □

题1. 设二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_t^2-y_{t+1}^2-y_{t+2}^2-\cdots-y_{t+s}^2,$$

其中$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$, $1\le i\le t+s$. 求证: f的正惯性指数$p\le t$, 负惯性指数$q\le s$.

证明提要. 设经过非退化的线性替换$X=CZ$变为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-z_{p+q}^2,$$

于是有

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_t^2-y_{t+1}^2-y_{t+2}^2-\cdots-y_{t+s}^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-z_{p+q}^2.$$

假设$p>t$, 考虑线性方程组

$$\begin{cases} y_i=0, & 1\le i\le t \\ z_j=0, & p+1\le j\le p+q \end{cases}$$

这是以n个未知数$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的含有$t+n-p$个方程的齐次线性方程组,必有非零解. 代入上面式子, 左边≤ 0, 右边≥ 0, 所以只能等于0. 又从$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2=0$推出$z_i=0, 1\le i\le p$. 这表明$X=CZ=0$, 与非零解矛盾. 因此$p\le k$. 同理$q\le s$. $\square$

题2. 定义映射$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$如下:

$$f(X) = |x_1|+\cdots+|x_r|-|x_{r+1}|-\cdots-|x_{r+s}|, \forall X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

其中$r \geq s \geq 0$. 证明:

(1) 存在V的一个$n-r$维子空间W, 使得对于任意的$X \in W$, 有$f(X) = 0$;

(2) 若W_1, W_2是$\mathbb{R}^n$的两个$n-r$维子空间, 且满足对任意的$X \in W_1 \cup W_2$, 有$f(X) = 0$, 则一定有$\dim(W_1 \cap W_2) \geq n-(r+s)$.

(2002北大高等代数考研题)

证明提要. (1) 令$W=\mathrm{span}\{e_1+e_{r+1},\cdots,e_s+e_{r+s},e_{r+s+1},\cdots,e_n\}$，其中$e_i$为$R^n$中的标准单位向量. 则$W$为所求.

(2) 首先,我们断言: 设W是R^n的子空间, 满足$f(W)=0$, 则$\dim W\le n-r$. 我们只要证明W中任意$n-r+1$个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r+1}$线性相关即可. 事实上, 记$\alpha_i=(x_{i1},\cdots,x_{i,r},x_{i,r+1},\cdots,x_{i,r+s},x_{i,r+s+1},\cdots,x_{i,n})^T$, $1\le i\le n-r+1$. 则对任意的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-r+1}\in\mathbb{R}$, 都有$f(\sum_{i=1}^{n-r+1}\lambda_i\alpha_i)=0$. 即

$$\sum_{j=1}^{r}|\sum_{i=1}^{n-r+1}\lambda_i x_{ij}|-\sum_{j=r+1}^{r+s}|\sum_{i=1}^{n-r+1}\lambda_i x_{ij}|=0. \qquad (*)$$

考虑线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n-r+1}\lambda_i x_{ij}=0,\ \ r+1\le j\le n,$$

它包含$n-r$个方程, $n-r+1$个未知量. 因此必有非零解$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-r+1})$, $\lambda_i\in\mathbb{R}, 1\le i\le n-r+1$.

不妨设$\lambda_{n-r+1} \neq 0$. 代入$(*)$式, 得

$$\sum_{i=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n-r+1} \lambda_i x_{ij} \right| = 0,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n-r+1} \lambda_i x_{ij} = 0, \quad 1 \leq j \leq r,$$

故有

$$\sum_{i=1}^{n-r+1} \lambda_i x_{ij} = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

即

$$\sum_{i=1}^{n-r+1} \lambda_i \alpha_i = 0.$$

因此

$$\alpha_{n-r+1} = -\sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{\lambda_{n-r+1}} \alpha_i.$$

即$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r+1}$线性相关. 这就证明了$\dim W \leq n-r$.

其次, 记$U=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n \mid x_i=0, 1\le i\le r+s\}$. 则显然$f(U)=0$且$\dim U=n-r-s$. 我们断言, 若$W$是$R^n$的$n-r$维子空间, 满足$f(W)=0$, 则必有$U\subseteq W$. 事实上, 显然$f(U)=0$. 假设$U\nsubseteq W$, 取$0\ne\beta_0\in U\backslash W$, 取$W$的一组基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$, 则$\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$线性无关. 令$V_0:=\text{span}\{\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}\}$, 则$f(V_0)=0$且$\dim V_0=n-r+1>n-r$. 与上面断言矛盾. 因此$U\subseteq W$.

现在, 若W_1,W_2是R^n的两个$n-r$维子空间, 且满足$f(W_i)=0, i=1,2$. 由上面断言知$U\subseteq W_1\cap W_2$.故

$$\dim(W_1\cap W_2)\ge \dim V_2=n-r-s.$$

证毕. $\square$

§2. 关于半正定矩阵的充要条件

命题. 实数域$\mathbb{R}$上的二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$正定

$\Longleftrightarrow$ A的所有顺序主子式> 0;

$\Longleftrightarrow$ A的所有顺序主子式的代数余子式> 0;

$\Longleftrightarrow$ A的所有主子式> 0.

命题. 对称阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$是半正定

$\Longleftrightarrow$ A的一切主子式全≥ 0.

注. 条件”对称阵A的所有顺序主子式≥ 0”并不能推出”A是半正定”. 反例: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

§3. 半正定矩阵的分解

题3. 设A是半正定矩阵, 则存在唯一的半正定矩阵B, 使得$A = B^2$. 并且对于任意矩阵C, $BC = CB \Longleftrightarrow AC = CA$.

证明提要. 设A是半正定矩阵, 所以存在正交矩阵T, 使得

$$A = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}T.$$

其中$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

令$B = T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}\}T$, 则$B$是半正定阵且满足$A = B^2$.

唯一性. 设还有一个半正定矩阵C满足$A = C^2$. 则存在正交矩阵S, 使得

$$C = S^{-1}\text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}S.$$

其中$0 \le \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n$. 由此可知

$$A = C^2 = S^{-1}\text{diag}\{\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2\}S.$$

因此$\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2$是$A$的特征根.所以$\lambda_i = \mu_i^2$, 即$\mu_i = \lambda_i^{1/2}, 1 \le i \le n$. 故

$$C = S^{-1}\text{diag}\{\lambda_1^{1/2}, \mu_2^{1/2}, \ldots, \mu_n^{1/2}\}S.$$

再由$A = B^2 = C^2$得

$$A = T^{-1}\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}T = S^{-1}\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}S.$$

记$TS^{-1}=(p_{ij})_{n\times n}$, 则有

$$TS^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}TS^{-1},$$

即$p_{ij}\lambda_j=\lambda_i p_{ij}$.所以在$\lambda_i\neq\lambda_j$时, 有$p_{ij}=0$. 因此恒有

$$p_{ij}\lambda_j^{1/2}=\lambda_i^{1/2}p_{ij},\quad 1\leq i,j\leq n.$$

即恒有

$$TS^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1^{1/2},\lambda_2^{1/2},\ldots,\lambda_n^{1/2}\}=\mathrm{diag}\{\lambda_1^{1/2},\lambda_2^{1/2},\ldots,\lambda_n^{1/2}\}TS^{-1},$$

即

$$B=T^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1^{1/2},\lambda_2^{1/2},\ldots,\lambda_n^{1/2}\}T=S^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1^{1/2},\mu_2^{1/2},\ldots,\mu_n^{1/2}\}S=C.$$

最后,若$DA = AD$, 即

$$DT^{-1}\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}T = T^{-1}\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}TD.$$

所以

$$TDT^{-1}\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}TDT^{-1}.$$

同上面一样讨论知

$$TDT^{-1}\text{diag}\{\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}\} = \text{diag}\{\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}\}TDT^{-1},$$

即$DB = BD$. $\square$

注1. 当A为正定阵时,B也是正定阵.

注2. 从证明过程可以看出,题目中的2可以改成任意正整数k.

§4. 可逆矩阵的极分解

题4. 对任意n阶可逆矩阵A, 存在正交矩阵T和两个正定矩阵B, B_1, 使得

$$A = B_1 T = TB.$$

并且这个分解是唯一的.

证明提要. 因为A是可逆阵, 所以$A'A$是正定阵,所以存在正定阵B, 使得$A'A = B^2$.

令$T = AB^{-1}$, 则$T'T = B'^{-1}A'AB^{-1} = B^{-1}B^2B^{-1} = I$. 所以$T$是正交阵, 且$A = AB^{-1}B = TB$.

唯一性. 设存在正交阵S和正定阵C,使得$A = TB = SC$. 则直接计算知$A'A = B^2 = C^2$. 由上面的题目知$B = C$,因此$T = S$.

证明$A = B_1T$. 事实上, $A = TB = (TBT')T$, 令$B_1 = TBT'$. 因B正定知B_1也是正定的. 同理可以证明唯一性. $\square$

题5. 对任意n阶可逆矩阵A, 存在正交矩阵S和S_1, 使得

$$A = S\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}S_1,$$

其中$0 < \lambda_n \le \cdots \le \lambda_2 \le \lambda_1$, 又$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 是正定矩阵$A'A$的所有特征根.

证明提要. 因A有极分解式$A = BT$, 其中B是正定阵, T是正交阵, 且$A'A = B^2$.将B化为标准型, 即存在正交阵S, 使得$S'BS = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. 所以$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$是$B^2 = A'A$的所有特征根. 并且$A = S\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}S'T$. 令$S_1 = S'T$, 题目即证. □

§5. 不可逆矩阵的极分解

设$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 如果存在正交阵$P, Q$使得$B = PAQ$, 则称$A$正交相抵于$B$. 矩阵的相抵关系是$\mathbb{R}^{m\times n}$中的等价关系.

题6.证明n阶可逆实矩阵A正交相抵于$\mathrm{diag}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, 这里$u_1, u_2, \cdots, u_n$都是正实数, 且$u_1^2, u_2^2, \cdots, u_n^2$是$A'A$的所有特征值.

题7.证明任意n阶实方阵A都正交相抵于形如$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的矩阵,其中$B$是$r$阶可逆实方阵, $r = \mathrm{rank}(A)$.

题8. 证明任意n阶实方阵A都正交相抵于$\mathrm{diag}\{\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & u_r \end{pmatrix}, 0\}$的矩阵,其中$r = \mathrm{rank}(A)$, $u_1, u_2, \cdots, u_n$都是正实数,且$u_1^2, u_2^2, \cdots, u_n^2$是$A'A$的所有特征值.

题9. 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 则存在正交矩阵$T$, 半正定矩阵$S_1, S_2$, 使得$A = S_1T = TS_2$.

谢　谢!